

Der Tetraeder: Elementarform, Quantengeometrie und die Frage nach Innen und Außen

Leseanweisung: Diesen Text mehrmals lesen und dabei jeweils nur einen Aspekt näher untersuchen und recherchieren. Mit zeitlichem Abstand dann wieder aufgreifen und das eigene Verständnis am inzwischen veränderten Bild zum Thema überprüfen.

1. Die antike Ausgangsform

Der Tetraeder ist in Platons *Timaios* die geometrische Elementarform des Feuers. Zusammen mit Würfel (Erde), Oktaeder (Luft) und Ikosaeder (Wasser) bildet er vier der fünf regulären Körper, aus denen Platon die sichtbare Welt konstruiert sein lässt – begründet mit dem Argument, der Kosmos müsse als vollkommenes Werk das höchstmögliche Maß an Symmetrie besitzen (*Platon, Timaios, Kap. 20–21, 53c–56c; vgl. Wikipedia „Timaios“ und „Platonischer Körper“*). Der Tetraeder ist dabei nicht willkürlich gewählt, sondern der einfachste der fünf Körper – die minimale dreidimensionale Figur überhaupt, die sich aus vier Dreiecksflächen schließen lässt.

Diese Elementarrolle des Tetraeders kehrt in der Zahlenmystik der Pythagoreer wieder: Die *Tetraktys* (ein aus zehn Punkten in vier Reihen gebildetes Dreieck) galt als geometrische Genese der Dimensionen – Punkt, Linie, Fläche, Körper –, wobei die vierte Reihe erstmals einen Tetraeder aufspannen kann (*Artikel „Tetraktys“, Wikipedia / AnthroWiki*). Blavatsky verknüpft diese Struktur mit dem Tetragrammaton: Das vollendete Dreieck werde zur Tetraktys, dem „dualen Symbol“ des vierbuchstabigen Gottesnamens (*Die Geheimlehre, Bd. II*). Bei Steiner erscheint der Tetraeder an anderer Stelle wieder – als kosmisch geprägte Grundform, sowohl in der Kristallbildung (als konserviertes Zusammenwirken von Mars, Venus und Merkur aus dem alten Mondenzustand) als auch, großmaßstäblich, als postulierte Grundstruktur der Erde selbst (*GA 354, zwölfter Vortrag; AnthroWiki „Tetraederstruktur der Erde“*).

2. Der Tetraeder in der Quantengravitation

Frage: Spielt in der Quantenphysik, die überwiegend auf höherer Mathematik gründet, ein Bezug zu den platonischen Körpern – insbesondere zum „feurigen“ Tetraeder – tatsächlich eine erkennbare Rolle, oder handelt es sich um eine bloß äußerliche Analogie?

In der Schleifenquantengravitation (*Loop Quantum Gravity*, LQG – einem von mehreren konkurrierenden Ansätzen, Raum, Zeit und Schwerkraft mit den Prinzipien der Quantenmechanik zu vereinen) wird der Raum nicht als Kontinuum, sondern als *Spinnetzwerk* beschrieben: ein Graph aus Knoten und Kanten, dessen Kanten mit halbzahligen Werten (Spin-Quantenzahlen – einer aus der Quantenmechanik von Elementarteilchen übernommenen Kennzahl) versehen sind. Auf diesen Knoten wirkt der *Volumenoperator* (das mathematische Werkzeug, mit dem man in der Quantentheorie einer Größe – hier: dem Volumen eines Raumbereichs – einen messbaren Wert zuordnet); sein Spektrum (die Menge der möglichen Messwerte) ist nachweislich diskret, nicht

kontinuierlich (C. Rovelli, L. Smolin, *Discreteness of Area and Volume in Quantum Gravity*, *Nuclear Physics B* 442, 1995, Preprint November 1994).

Der einfachste, „elementarste“ Knotentyp in diesem Netzwerk – einer mit vier Kanten – entspricht dabei mathematisch exakt einem Tetraeder: Seine vier Flächen werden durch Drehimpulsoperatoren (mathematische Objekte, die in der Quantenmechanik Rotationseigenschaften beschreiben) repräsentiert, die sich zu einem sogenannten Spin-Singulett koppeln (ein Zustand, in dem sich die einzelnen Drehimpulse zu einem Gesamtwert von Null neutralisieren). Dieser *Quantentetraeder* gilt als das elementare, nicht weiter zerlegbare Volumenquantum des Raumes an der Planck-Skala (die kleinste physikalisch sinnvolle Längeneinheit, ca. 10^{-35} Meter) (A. Barbieri, *Quantum tetrahedra and simplicial spin networks*, *Nuclear Physics B* 518, 1998; J. Baez, J. Barrett, *The Quantum Tetrahedron in 3 and 4 Dimensions*, *Adv. Theor. Math. Phys.* 3, 1999; spätere Verallgemeinerung auf beliebige Polyeder: E. Bianchi, P. Doná, S. Speziale, *Polyhedra in Loop Quantum Gravity*, 2011).

Bemerkenswert: Unabhängig von der LQG kommt ein zweiter, methodisch völlig anderer Ansatz – die *kausalen dynamischen Triangulierungen* (ein Verfahren, das die Raumzeit über Pfadintegral-Methoden statt kanonischer Quantisierung diskretisiert) – ebenfalls auf tetraederförmige Grundbausteine der Raumzeit (R. Loll u. a.; vgl. *Spektrum*-Artikel „Schleifenquantengravitation: Eine Raumzeit aus Schleifen“). Das spricht eher für eine mathematische Notwendigkeit als für eine bewusst gesuchte Symbolik: Der Tetraeder ist die einfachste mögliche Zerlegungseinheit des dreidimensionalen Raums, unabhängig vom gewählten physikalischen Zugang.

Ob dies ein bloßer mathematischer Zufall ist – dass die einfachste Form immer wieder als die einfachste Form erscheint – oder ein Hinweis auf eine tiefere strukturelle Notwendigkeit des dreidimensionalen Raums, die Platon intuitiv, ohne den heutigen Beweisapparat, bereits erfasst haben könnte, lässt sich nicht entscheiden und sollte offengehalten werden.

3. Evolutionär, revolutionär oder beiläufig?

Frage: Welche Bedeutung hat dieser Befund für das wissenschaftliche Denken – hat er eher fortschreibenden (evolutionären), umstürzenden (revolutionären) oder letztlich nebensächlichen (beiläufigen) Charakter?

Zwei Ebenen sind zu unterscheiden. Methodisch ist der Weg zu diesem Ergebnis evolutionär: Die Diskretheit der Raumgeometrie war keine neue Grundannahme, sondern die Konsequenz, ein seit Jahrzehnten etabliertes Verfahren – die nicht-perturbative Quantisierung (ein Verfahren, klassische physikalische Größen in quantenmechanische Operatoren zu überführen, ohne dabei Näherungen über kleine Störungen vorauszusetzen) – konsequent auf die Allgemeine Relativitätstheorie anzuwenden. Es handelt sich um die Fortsetzung eines etablierten Forschungsprogramms, nur eben – radikal – bis zur Metrik von Raum und Zeit selbst weitergetrieben.

Das *Ergebnis* dagegen hätte, sollte es sich dereinst bestätigen, durchaus revolutionären Charakter: die Auflösung der Vorstellung eines kontinuierlichen Raum-Zeit-Kontinuums

zugunsten einer körnigen, diskreten Struktur. Allerdings ist die Theorie bis heute experimentell unbestätigt, wissenschaftlich umstritten und nur einer von mehreren konkurrierenden Ansätzen (Stringtheorie, kausale dynamische Triangulierungen, Asymptotische Sicherheit, kausale Mengen) – ein vollzogener Paradigmenwechsel liegt also (noch) nicht vor, sondern ein Kandidat dafür.

Die Sonderrolle des Tetraeders selbst ist dagegen eher als beiläufig einzustufen: Er erscheint nicht, weil ihm eine besondere Qualität zugeschrieben würde, sondern weil er die mathematisch sparsamste Lösung ist – ein Nebenprodukt der Konstruktion, kein gesuchtes Ziel.

4. Quantisierung als „Rhythmisierung“ des Raumes

Frage: Kann man Quantisierung als eine Art „Rhythmisierung“ dessen, was zuvor als reines Kontinuum gedacht wurde?

Technisch erzwingt Quantisierung (die Überführung klassischer Größen in Operatoren) nicht zwangsläufig Diskretheit; ob ein Spektrum diskret oder kontinuierlich ausfällt, hängt davon ab, ob das zugrundeliegende System kompakt bzw. geschlossen ist (wie bei gebundenen Bahnen im Atom oder den geschlossenen Schleifen der LQG) oder offen (wie beim freien Teilchen im unendlichen Raum, dessen Impulsspektrum auch nach der Quantisierung kontinuierlich bleibt).

Sprachhistorisch ergibt sich dabei ein aufschlussreicher Kunstgriff: Aristoteles berichtet, Demokrit habe seine Atome durch drei Eigenschaften bestimmt – *rhythmos*, *diathige*, *trope* (Metaphysik I, 4, 985b) – von ihm übersetzt als Gestalt, Anordnung, Lage. „Rhythmos“ bedeutete also ursprünglich nicht periodische Wiederkehr in der Zeit (den heutigen musikalischen Sinn), sondern **Gestalt, Form, Struktur** – die spezifische Prägung, durch die sich ein Atom von einem anderen unterscheidet. Erst später verengte sich der Begriff auf den zeitlich-periodischen Sinn. Versteht man „Rhythmisierung“ in diesem älteren, demokriteischen Sinn, trifft die Formulierung den Vorgang recht genau: Quantisierung verleiht einem Kontinuum eine zählbare Gestalt – einen *rhythmos* im alten Wortsinn –, wo vorher ein undifferenziertes Ganzes war. Der Tetraeder wäre in diesem Bild exakt ein solcher *rhythmos*: die dem Raum aufgeprägte minimale Gestalt, durch die er erst zählbar und gegliedert wird.

5. Ein Schlussbild: der mediale Tetraeder

Werden in einem Tetraeder die vier Flächenmittelpunkte markiert und verbunden, entsteht ein zweiter, auf der Spitze ruhender Tetraeder. Geometrisch handelt es sich um eine Punktspiegelung des ursprünglichen Körpers am gemeinsamen Schwerpunkt, mit dem Verkleinerungsfaktor $1/3$. Daraus folgt: Das Volumen des kleineren Körpers beträgt nicht ein Drittel, sondern $(1/3)^3 = 1/27$ des ursprünglichen Volumens; seine gesamte Form und Lage ist vollständig aus den vier Berührungspunkten des größeren Körpers abgeleitet, ohne eigene, unabhängige Konstruktionsregel.

Frage: Ist der Entstehungsprozess dieser Figur von außen nach innen zu denken – oder von innen nach außen?

Rein mathematisch ist die zugrundeliegende Abbildung umkehrbar: Ebenso wie sich der kleinere aus dem größeren Körper ableiten lässt, lässt sich umgekehrt der größere aus dem kleineren durch Spiegelung mit dem Faktor -3 zurückgewinnen. Der *Konstruktionsvorgang*, wie er sprachlich gefasst wurde – die Bestimmung von Flächenmittelpunkten –, setzt jedoch notwendig die vorherige, vollständige Existenz des größeren Körpers voraus und beschreibt damit eine Bewegung von außen nach innen: das Umfassende als Bedingung, aus der das Abgeleitete hervorgeht. Gleichzeitig trägt der kleinere Körper, da die Transformation umkehrbar ist, den vollständigen Bauplan des größeren immer schon virtuell in sich – eine Lesart, die eher der Bewegung von innen nach außen entspräche: das Umfassende als das im Kleineren bereits Angelegte, das sich aus ihm heraus entfalten könnte.

Damit zeigt sich in der Geometrie selbst die klassische Spannung zwischen Involution (das Größere steigt herab, verdichtet und individuiert sich zur Form) und Evolution (das Kleinere entfaltet das im Keim bereits Angelegte) – nicht als Entweder-Oder, sondern als eine einzige Bewegung, die sich je nach gewähltem Ausgangspunkt der Betrachtung als Herabkunft oder als Entfaltung zeigt.

Eine Parallele aus der vedantischen Tradition

Paramahansa Yogananda deutet in seinem Kommentar zur Bhagavad Gita (*God Talks with Arjuna*, Kap. 15) das altvedische Bild des Ashvattha-Baumes, dessen Wurzeln oben und dessen Zweige unten liegen: Die sichtbare, materielle Welt sei die nach unten gewachsene, umgekehrte Erscheinung einer Wirklichkeit, deren eigentlicher Ursprung – die „Wurzel“ – im Geistigen liegt und der sinnlichen Betrachtung entzogen bleibt. Dasselbe Umkehrungsprinzip wendet er auf die Schöpfungsgeschichte an: Der Mensch im Naturzustand lebt gewissermaßen kopfständig, mit seinem Wahrnehmungs- und Energiestrom dauerhaft nach außen und unten gerichtet; Erkenntnis der geistigen Welt erfordere die vollständige Umkehrung dieses Stroms nach innen und oben (*P. Yogananda, God Talks with Arjuna: The Bhagavad Gita, Kommentar zu Kapitel 15; vgl. auch Autobiographie eines Yogi, Kap. 16*).

Diese Umkehrung als Erkenntnisprinzip berührt die offene Frage zum medialen Tetraeder: Auch dort ließ sich zeigen, dass ein und dieselbe geometrische Beziehung – je nachdem, von welchem Pol aus man sie liest – entweder als Herabkunft (Involution, außen bestimmt innen) oder als Entfaltung (Evolution, innen strebt nach außen) erscheint. Yoganandas Bild fügt dem eine dritte, komplementäre Nuance hinzu: Die „richtige“ Blickrichtung selbst ist nicht neutral gegeben, sondern muss aktiv gewonnen werden – Erkenntnis der geistigen Welt ist für ihn kein bloßer Perspektivwechsel im Beobachten, sondern eine im wörtlichen Sinn umzukehrende Bewegung des Bewusstseins.

Schlussgedanke des Fragenden

Der Raum, von dem hier die Rede ist, ist nur ein Aspekt, eine „Ebene“ eines umfassenderen Raumes, in dem sich auch die menschlich-seelischen Komponenten und ebenso der geistige Ursprungskern jeder menschlichen Entität befinden. Er ist ebenso real, wie der Gedanke über ihn real ist – auch wenn er nicht sinnlich betrachtet werden kann. Die Quantenphysik und ihre Theoreme liefern bedeutende Möglichkeiten für vorsichtige Analogien; sie helfen dem nie fertigen Denker der Theosophie, seine Ansätze und Versuche zu schärfen. Anders gesagt: Ein „körnig“ verstandener Raum wird in seinen „Zwischenräumen“ von dem durchleuchtet oder durchdrungen, was als größerer, umfassenderer Raum angenommen werden kann. Dabei kann, paradoxerweise, der kleinere, umgekehrte Tetraeder als Vertreter des größeren Raumes gesehen werden.

Quellenhinweise gesammelt

- Platon, *Timaios*, Kap. 20–21 (53c–56c)
- Aristoteles, *Metaphysik I*, 4, 985b (zu Demokrit)
- H. P. Blavatsky, *Die Geheimlehre*, Bd. II
- Rudolf Steiner, GA 354, zwölfter Vortrag, Dornach, 18. September 1924
- C. Rovelli, L. Smolin: *Discreteness of Area and Volume in Quantum Gravity*, *Nuclear Physics B* 442 (1995), 593–619
- A. Barbieri: *Quantum tetrahedra and simplicial spin networks*, *Nuclear Physics B* 518 (1998), 714–728
- J. Baez, J. Barrett: *The Quantum Tetrahedron in 3 and 4 Dimensions*, *Adv. Theor. Math. Phys.* 3 (1999), 815–850
- E. Bianchi, P. Doná, S. Speziale: *Polyhedra in Loop Quantum Gravity* (2011)
- P. Yogananda: *God Talks with Arjuna: The Bhagavad Gita*, Kommentar zu Kapitel 15; sowie *Autobiographie eines Yogi*, Kap. 16